Das Umkehrungsproblem in der verallgemeinerten Elektrodynamik

Von H. Koppe

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Heidelberg

(Z. Naturforschg. **10a**, 505—508 [1955]; eingegangen am 2. Juni 1955)

Es wird das Problem behandelt, zu einem gegebenen statischen Potential $U(r)$ eine invariante Funktion im Sinne der Boppschen Elektrodynamik zu finden. Die Lösung läßt sich durch Hinzunahme einer Kausalitätsforderung eindeutig machen, ist dann aber nicht mehr für jedes statische Potential möglich.

1. Problemstellung

Das Vektoralpotential $A_\mu(x)$, welches an der Stelle x^μ von einer Ladung, die sich auf der Weltlinie $a^\mu(s)$ bewegt, erzeugt wird, läßt sich bekanntlich darstellen durch

$$A_\mu(x) = e \int \delta(\Gamma_{xa}) \, \dot{a}_\mu \, \mathrm{d}s \,, \tag{1}$$

wobei über die Weltlinie $a^\mu(s)$ zu integrieren, und

$$\Gamma_{xa} = -(x_\mu - a_\mu)(x^\mu - a^\mu)$$

das Intervall zwischen dem Aufpunkt x^μ und dem Ort a^μ der Ladung ist (wir setzen durchgängig $c=1$).

Nach Bopp[1] gelangt man zu Verallgemeinerungen der Elektrodynamik, indem man die Diracsche δ-Funktion in (1) durch eine andere Funktion $f(\Gamma)$ ersetzt.

Für eine ruhende Ladung ist nur die Zeitkomponente A_4 von Null verschieden und gleich dem statischen Potential[3]

$$U(r^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t^2 - r^2) \, \mathrm{d}t; \tag{2}$$

dabei ist die Ladung e in die ohnehin willkürliche Funktion $f(\Gamma)$ hineingezogen worden. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das statische Potential U hier und im folgenden als Funktion von r^2 (und nicht von r) aufgefaßt wird. Mit $f(\Gamma) = e\,\delta(\Gamma)$ erhält man aus Formel (2) das Coulomb-Potential.

Wir wollen hier das zu (2) gehörige Umkehrungsproblem untersuchen, d. h. die Frage, ob und wie man eine Funktion $f(\Gamma)$ finden kann, die zu einem vorgegebenen statischen Potential $U(r^2)$ führt. Dieses Problem ist bereits in den Arbeiten von Bopp und Steinwedel behandelt worden. Dabei wurde aber übersehen, daß die Lösung nicht eindeutig ist. Es handelt sich gar nicht so sehr darum, eine Lösung von (2) zu finden, sondern nach zusätzlichen Gesichtspunkten zu suchen, die die Lösung eindeutig machen.

Wenn man sich auf die orthochrone Lorenz-Gruppe beschränkt (also keine Invarianz gegen Zeitumkehr fordert), dann darf $f(t^2 - r^2)$ für $t^2 - r^2 > 0$ noch vom Vorzeichen von t abhängen:

$$\begin{aligned} f &= f_\mathrm{R} \text{ für } t^2 > r^2 \text{ und } t > 0\,, \\ f &= f_\mathrm{A} \text{ für } t^2 > r^2 \text{ und } t < 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(retardierte und avancierte Potentiale).

Nach (2) hängt das statische Potential nur von $f_\mathrm{R} + f_\mathrm{A}$ ab, und man kann deshalb immer über eine der beiden Funktionen beliebig verfügen.

Wir setzen nun in (2) zunächst einmal $r^2 = x$ und $t^2 - r^2 = y$ und erhalten

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_{-x}^{\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{x+y}} \, \mathrm{d}y\,, \qquad x \geq 0\,; \\ f &= \frac{1}{2}(f_\mathrm{A} + f_\mathrm{R}) \qquad \text{für } y > 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Es muß nun beachtet werden, daß aus (2) die Gl. (4) nur für positives x folgt, da $x = r^2$ ist. Wenn man das zunächst einmal übersieht und annimmt, daß $U(x)$ für alle Werte von x definiert sei, dann ist (4) eine Abelsche Integralgleichung, die unter ziemlich allgemeinen Bedingungen die Lösung

$$f(y) = -\frac{1}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{-\infty}^{-y} \frac{U(x)}{\sqrt{-x-y}} \, \mathrm{d}x \tag{5}$$

hat. Man sieht daraus, daß $f(y)$ von der Weise abhängt, in der man $U(x)$ nach den durch das statische Potential nicht festgelegten negativen Werten von x fortgesetzt hat.

[1] F. Bopp, Ann. Phys., Lpz. **42**, 573 [1943]. Vgl. auch Steinwedel[2], dessen Bezeichnungsweise wir uns anschließen.

[2] H. Steinwedel, Z. Naturforschg. **6a**, 123 [1951].

[3] Vgl. Steinwedel[2], Gl. (24).

2. Retardierte Potentiale

Wenn man außer der Lorenz-Invarianz noch strenge Kausalität (d. h., daß in jedem Bezugssystem die Ursache der Wirkung zeitlich vorausgeht) fordert, dann muß f der Forderung $f(\Gamma) \neq 0$ nur für $t^2 > r^2$ und $t > 0$ unterworfen werden. f muß also ein retardiertes Potential sein. Damit wird aus (4)

$$U(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(y)}{\sqrt{x+y}} \, \mathrm{d}y; \qquad x \geq 0. \tag{6}$$

Obwohl sich das von (4) nur dadurch unterscheidet, daß die untere Grenze der Integration von $-x$ nach Null gerückt ist, repräsentiert (6) einen völlig anderen Typ von Integralgleichungen. Wir werden zeigen, daß (6) entweder keine oder eine eindeutige Lösung hat.

Ein kleiner Umweg über die Funktionentheorie führt am schnellsten zum Ziel. Wir orientieren uns zunächst über die Gesamtheit der Funktionen, die überhaupt durch ein Integral der Form (6) dargestellt werden können. Zunächst wird $f(y)$ gewissen Bedingungen genügen müssen, damit das Integral existiert. Im Anhang wird bewiesen, daß das Integral für alle positiven Werte von x existiert, wenn es wenigstens für ein x_0 existiert.

Dann bilden wir die n-te Ableitung von $U(x)$. Wir haben zunächst einmal rein formal

$$\frac{\mathrm{d}^n U}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{2} \int_0^\infty f_{\mathrm{R}}(y) \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x+y)^{-1/2} \, \mathrm{d}y$$
$$= (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1} \cdot n!} \int_0^\infty \frac{f_{\mathrm{R}}(y)}{(x+y)^{n+1/2}} \, \mathrm{d}y.$$

Die Vertauschung von Integration und Differentiation ist gerechtfertigt, wenn das Integral rechts konvergiert. Wie im Anhang gezeigt wird, ist das der Fall.

Damit ist zunächst gezeigt, daß das Integral in (6) entweder divergiert oder eine für alle $x > 0$ definierte und beliebig oft differenzierbare Funktion darstellt. $U(x)$ muß also eine analytische Funktion sein, die, wie man sofort sieht, irgendwelche Verzweigungspunkte auf der negativ reellen Achse haben muß. Wir setzen U in die längs der negativ reellen Achse aufgeschnittene z-Ebene fort durch die Festsetzung

$$|\arg \sqrt{z+y}\,| < \pi.$$

Damit ergeben sich für $U(z)$ am oberen resp. unteren Rand des Verzweigungsschnittes die Werte

$$U(-a + \mathrm{o} \cdot i) = -\frac{i}{2} \int_0^a \frac{f_{\mathrm{R}}(y)}{\sqrt{a-y}} \, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{f_{\mathrm{R}}(y)}{\sqrt{y-a}} \, \mathrm{d}y,$$

$$U(-a - \mathrm{o} \cdot i) = \frac{i}{2} \int_0^a \frac{f_{\mathrm{R}}(y)}{\sqrt{a-y}} \, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{f_{\mathrm{R}}(y)}{\sqrt{y-a}} \, \mathrm{d}y.$$

Definiert man jetzt

$$m(a) = \frac{i}{2} \{U(-a + \mathrm{o} \cdot i) - U(-a - \mathrm{o} \cdot i)\}, \tag{7}$$

so ergibt sich:

$$m(a) = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{f_{\mathrm{R}}(y)}{\sqrt{a-y}} \, \mathrm{d}y. \tag{8}$$

Das ist eine Abelsche Integralgleichung mit der Lösung

$$f_{\mathrm{R}}(y) = \frac{2}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_0^y \frac{m(a)}{\sqrt{y-a}} \, \mathrm{d}a. \tag{9}$$

Wenn es eine Lösung von (6) gibt, dann ist sie durch (7) und (9) gegeben. Da aber die Existenz der Lösung bei der Ableitung vorausgesetzt wurde, muß sie noch nachträglich bewiesen werden, indem man das Resultat durch Einsetzen in (6) verifiziert. Fällt diese Nachprüfung negativ aus, dann ist bewiesen, daß keine Lösung existiert.

Als Beispiel betrachten wir eine Verallgemeinerung des Coulomb-Potentials

$$U(x) = 1/(C + \sqrt{x}). \tag{10}$$

Daraus folgt

$$m(a) = \sqrt{a}/(C^2 + a)$$

und

$$f_{\mathrm{R}}(y) = \frac{2}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^y \frac{\sqrt{a}\, \mathrm{d}a}{(C^2+a)\sqrt{y-a}} = \frac{C}{(C^2+y)^{3/2}}.$$

Die Lösung läßt sich durch Einsetzen in (6) bestätigen. Das Coulomb-Potential bekommt daraus als Grenzfall $C \to 0$, wenn man berücksichtigt, daß

$$\int_0^\infty \frac{C}{(C^2+y)^{3/2}} \, \mathrm{d}y = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{C \to 0} \frac{C}{(C^2+y)^{3/2}} = 0 \quad \text{für } y \neq 0.$$

Tab. 1 gibt eine Reihe weiterer Beispiele.

Daß es notwendig ist, die Lösung zu verifizieren, zeigt das Beispiel $U(x) = 1/(1+x^2)\sqrt{x}$. Man erhält $m(a) = 1/(1+a^2)\sqrt{a}$ und

$$f_{\mathrm{R}}(y) = \frac{1}{2i}\left((1+iy)^{-3/2} - (1-iy)^{-3/2}\right)$$
$$= \frac{2+\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{2}\,(1+y^2)^{3/2}} \sqrt{\sqrt{1+y^2}-1}.$$

	$U(x)$	$f(y)$	Bemerkung
1.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\,\delta(y)$	
2.	$\frac{1}{C+\sqrt{x}}$	$\frac{C}{(C^2+y)^{3/2}}$	$C > 0$
3.	$x^{-\alpha}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1/2-\alpha)}\,y^{-\alpha-1/2}$	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$
4.	$\frac{\exp(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$2\,\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{y}}J_1(\sqrt{y})$	
5.	$\exp(-\sqrt{x})$	$\frac{1}{4}\left\{J_2(\sqrt{y}) - \frac{2}{\sqrt{y}}J_1(\sqrt{y}) - J_0(\sqrt{y})\right\}$	

Tab. 1.

Einsetzen in (6) gibt

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{f(y)}{\sqrt{x+y}}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}\,(x-1) - 2\,x\sqrt{x}}{2\,(1+x^2)}\,.$$

Das ist von der Ausgangsfunktion verschieden, es gibt also keine Lösung.

Es seien noch zwei einfache notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit von (6) angegeben:

1. $U(x)$ muß eine analytische Funktion von x sein, die auf der negativ reellen Achse Verzweigungspunkte hat und in der längs der negativ reellen Achse aufgeschnittenen x-Ebene regulär ist. (Das vorangehende Beispiel widerspricht dieser Bedingung, da $U(x)$ Pole bei $x = \pm i$ besitzt.)

2. Wie im Anhang bewiesen wird, muß das Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{U(x)}{(1+x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

existieren.

Daß es sich dabei nur um hinreichende Bedingungen handelt, zeigt das Beispiel $U(x) = x^{\frac{1}{4}}$, welches beiden Bedingungen genügt, und für welches Gl. (6) trotzdem keine Lösung besitzt.

3. Raumartige Potentiale

Die im vorangehenden Abschnitt als Nebenbedingung eingeführte Kausalitätsforderung ist zwar sehr naheliegend, aber nicht a priori notwendig. Die Möglichkeit einer Umkehr der Kausalfolge, wenigstens in kleinen Bereichen, ist in der letzten Zeit verschiedentlich in Betracht gezogen worden[4]. Da sich nun herausgestellt hat, daß das Kausalitätspostulat die Lösung des Umkehrproblems zwar eindeutig macht, aber die zulässigen statischen Potentiale auf eine schwer übersehbare Mannigfaltigkeit einschränkt, sei hier noch kurz eine andere Möglichkeit diskutiert. Man kann fordern, daß eine Wechselwirkung nur zwischen Punkten möglich ist, die raumartig zueinander liegen. Das bedeutet $f(\Gamma) = 0$ für $\Gamma > 0$, und aus (4) erhält man

$$U(x) = \int\limits_{-x}^{0} \frac{f(y)}{\sqrt{x+y}}\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^x \frac{f(-y)}{\sqrt{x-y}}\,\mathrm{d}y.$$

Das ist eine Abelsche Integralgleichung für $f(-y)$ mit der Lösung

$$f(-y) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int\limits_0^y \frac{U(x)}{\sqrt{y-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Auch hier ist es notwendig, die Lösung durch Einsetzen zu bestätigen.

Als Beispiel ergibt sich für $\mu > -\frac{1}{2}$:

$$U(x) = x^\mu; \quad f(y) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+1/2)}\,|\,y\,|^{\mu-1/2}.$$

Anhang

Beweis einiger Hilfssätze

Satz 1: Es sei $f(y)$ eine reelle Funktion, für die

$$U(x_0) = \int\limits_0^{\to\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}}\,\mathrm{d}y = \lim \int\limits_0^A \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}}\,\mathrm{d}y$$

für irgendein positiv reelles x_0 existiert. Dann existiert

$$I(x) = \int\limits_0^{\to\infty} \frac{f(y)}{\omega(y,x)}\,\mathrm{d}y$$

vorausgesetzt, daß $g(y,x) = \sqrt{y+x_0}/\omega(y,x)$ für hinreichend großes y monoton, und $|\,g\,| < M(x, x_0)$ ist.

Da die Bedingung im wesentlichen aussagt, daß $1/\omega$ nicht langsamer nach Null gehen darf als $1/\sqrt{y+x_0}$, ist der Satz intuitiv einleuchtend. Die Schwierigkeit des Beweises liegt darin, daß man mit minimalen Voraussetzungen über $f(y)$ auskommen möchte. Zunächst folgt aus der Voraussetzung, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$\left|\int\limits_a^b \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}}\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon \qquad \text{für } b > a \geq A(\varepsilon)\,.$$

[4] Vgl. z. B. W. Heisenberg, Z. Naturforschg. **6a**, 281 [1951].

Der Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, daß es dann auch zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $A'(\varepsilon')$ gibt, so daß

$$\left| \int_a^b \frac{f(y)}{\omega(y,x)} \, \mathrm{d}y \right| < \varepsilon' \quad \text{für } b > a \geq A'(\varepsilon').$$

Beweis: Auf Grund des zweiten Mittelwertsatzes[5] ist für ein $a \leq \xi \leq b$

$$\int_a^b \frac{f(y)}{\omega(y,x)} \, \mathrm{d}y = \int_a^b \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}} \, g(y,x) \, \mathrm{d}y$$

$$= g(a,x) \int_0^\xi \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}} \, \mathrm{d}y + g(b,x) \int_\xi^b \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}} \, \mathrm{d}y$$

und daher auf Grund der Voraussetzung

$$\left| \int_a^b \frac{f(y)}{\omega(y,x)} \, \mathrm{d}y \right| < 2\,\varepsilon M(x, x_0),$$

und das ist $< \varepsilon'$, wenn man $A' = A(\varepsilon'/2M)$ wählt.

Da $\omega(y,x) = (y+x)^{n+1/2}$ für $x > 0$ die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, gilt:

Satz 2: Unter den gleichen Voraussetzungen für $f(y)$ wie in Satz 1 existiert

$$U_n(x) = \int_0^{\to\infty} \frac{f(y)}{(y+x)^{n+1/2}} \, \mathrm{d}y$$

für alle $n \geq 0$ und alle $x \geq 0$.

Auf analoge Weise beweist man, daß $U_n(x)$ auch für alle komplexen x mit Ausnahme der negativ reellen Werte existiert.

Es seien $U_1(x)$, $f_1(x)$ und $U_2(x)$, $f_2(x)$ zwei Paare von Funktionen, die (6) genügen. Wir schreiben (6) für $f_1(y)$ an, multiplizieren mit $f_2(x)$ und integrieren über x:

$$\int_0^\infty U_1(x) f_2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^\infty f_2(x) \int_0^\infty \frac{f_1(y)}{\sqrt{y+x}} \, \mathrm{d}y.$$

Hier darf man rechts die Reihenfolge der Integrationen vertauschen, vorausgesetzt, daß $\int_0^\infty |f_2(x)| \, \mathrm{d}x$ existiert, und man erhält

$$\int_0^\infty U_1(x) f_2(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty U_2(x) f_1(x) \, \mathrm{d}x.$$

Die Voraussetzungen für $f_2(y)$ sind erfüllt für das Paar (2) der Tab. 1. Wir bekommen dann rechts (für $C = 1$) das Integral

$$\int_0^\infty f_1(x)/(1+\sqrt{x}) \cdot \mathrm{d}x,$$

welches nach Satz 1 existiert. Es gilt also

Satz 3: Wenn (6) eine Lösung hat, dann existiert das Integral

$$\int_0^\infty U(x)/(1+x)^{3/2} \cdot \mathrm{d}x.$$

[5] Vgl. Mangold-Knopp, Höhere Mathematik III, S. 155, Stuttgart 1948.

Über die Bewegung geladener Teilchen in schwach veränderlichen Magnetfeldern

Von Gerhard Hellwig

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **10a**, 508—516 [1955]; eingegangen am 2. Mai 1955)

Die Alfvénschen Näherungsgleichungen in schwach veränderlichen Magnetfeldern werden auf eine Weise hergeleitet, die eine Fallunterscheidung (grad H senkrecht oder parallel zu $\mathfrak{H}$) erübrigt und sowohl eine Verallgemeinerung auf den relativistischen Fall als eine Erweiterung auf höhere Näherungen zuläßt. Es wird gezeigt, daß die zeitliche Änderung von M (durch die „spiralende“ Bewegung des Teilchens erzeugtes magnetisches Moment) bei verschwindender Rotation der mechanischen Kräfte auch noch in zweiter Näherung verschwindet. Zum Schluß wird auf einen Einwand A. Schlüters gegen die Fermische Theorie der Nachbeschleunigung von Höhenstrahlteilchen eingegangen.

Einleitung

Die Bahn eines geladenen Teilchens in einem magnetischen Feld ist bei vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit und -lage vollständig festgelegt durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathfrak{r}}\, \mathfrak{H}(\mathfrak{r})]. \qquad \text{(E, 1)}$$

Um sich bei einem gegebenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$ einen Überblick zu verschaffen über die zu verschiedenen Anfangsbedingungen gehörenden Bahnen, ist man darauf angewiesen — abgesehen von den wenigen Fällen, wo man die Differentialgleichung explizit lösen kann —, diese numerisch zu integrieren. Da diese numerische Integration jedoch im allgemeinen Fall außerordentlich mühevoll ist, ist man be-